数理解析研究所講究録
1033 巻 1998 年 94-105

孤立特異点の平滑化と QUILLEN の計量

吉川 謙一 (KEN-ICHI YOSHIKAWA)
名古屋大学・多元数理科学研究科

本稿は研究集会「特異点と複素解析幾何」での筆者の講演に加筆したものである。同時期に開催された研究集会「多変数関数論にあらわれる解析と幾何」でも同様の内容の講演をした。本稿独自の内容として孤立特異点の平滑化に対して解析的トーションの挙動と周期の挙動との関連を論じた部分と *Andreotti − Mayer-* 形式の積分公式について論じた部分がある。本稿で触れなかった話題に Quillen 計量と射影的双対性がある。「多変数 … 」の筆者の稿を見て頂けると幸いである。

1. 楕円曲線の判別式

Jacobi の Δ-関数とは以下で定義される保型関数である：

$$\Delta(\tau) = q \cdot \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}, \quad q = \exp(2\pi i\tau), \quad \tau \in \mathbb{H}. \tag{1.1}$$

$\Delta(\tau)$ は次の 3 つの特徴付けを持つ。

(1) $\Delta(\tau)$ は唯一の重さ 12 の尖点形式である。

$$\Delta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{12}\Delta(\tau), \qquad \lim_{Im\tau\to+\infty}\Delta(\tau) = 0. \tag{1.2}$$

(2) $\Delta(\tau)$ は楕円曲線の判別式である (Jacobi)。

$E_\tau := \mathbb{C}/\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\tau$ の Weierstrass 表示を $y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$ とする時、

$$g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2 = (2\pi)^{12}\Delta(\tau). \tag{1.3}$$

(3) $\Delta(\tau)$ は E_τ の解析的トーションである（Kronecker 極限公式）。

$g_\tau = (Im\tau)^{-1}|dz|^2$ を E_τの Kähler 計量、

$\tau(E_\tau) = \exp(\zeta'_\tau(0))$ を (E_τ, g_τ) の解析的トーションとする時、

$$Im\,\tau \cdot \tau(E_\tau) = (2\pi)^2|\Delta(\tau)|^{-\frac{1}{6}}. \tag{1.4}$$

(3)' $\Delta(\tau)$ はコホモロジーの行列式の標準的な断面のノルムである。

$p : \mathbb{E} \to \mathbb{H}$ を $\mathbb{H}$ 上の楕円曲線の基本族（$p^{-1}(\tau) = E_\tau$），

$\lambda(\mathcal{O}_\mathbb{E}) := \det p_*\mathcal{O}_\mathbb{E} \otimes (\det R^1p_*\mathcal{O}_\mathbb{E})^{-1}$ をコホモロジーの行列式、

$\sigma_\mathbb{E} = 1 \otimes dz$ を $\lambda(\mathcal{O}_\mathbb{E})$ の標準的断面、$\|\cdot\|_Q$ を Quillen 計量とする時、

$$\|1 \otimes dz\|^2_Q(\tau) = (2\pi)^2|\Delta(\tau)|^{-\frac{1}{6}}. \tag{1.5}$$

<u>定理 1.1</u>. 楕円曲線の基本族に対して解析的トーションは判別式と一致し、それは *Jacobi* の Δ-関数である。

次の問題は定理 1.1 の高次元化を考えるに際して基本的であり、本稿の主題である。

<u>問題 1.1</u>. *Kronecker* 極限公式の自然な高次元化を見つけよ。

候補となる幾何学的対象として $c_1(X) = 0$ となる Kähler 多様体を考える：

$$\begin{array}{ccccc} \underline{g=1} & & \underline{g=2} & & \underline{g\geq 3} \\ & & Abel\,\text{曲面} & \longrightarrow & Abel\,\text{多様体} \\ & \nearrow & & & \\ \text{楕円曲線} & & & & \\ & \searrow & & & \\ & & K3\,\text{曲面} & \longrightarrow & Calabi-Yau\,\text{多様体} \\ & & Enriques\,\text{曲面} & & hyper-Kahler\,\text{多様体} \end{array}$$

本稿では Abel 多様体の系列で Kronecker 極限公式を一般化する。$K3$ 曲面や Enriques 曲面については Jorgenson-Todorov の研究（[J-T1,2]）がある。また、Abel 多様体の場合については Jorgenson-Kramer ([J-K]) が筆者と類似した内容を扱っている。

2. コホモロジーの行列式と Quillen 計量

2.1 解析的トーション.

(M, g_M) をコンパクト Kähler 多様体、

$\square_{0,q}$ を M 上の $(0,q)$-形式に作用するラプラシアン、

$\sigma(\square_{0,q}) = \{0 \le \cdots \le 0 \le \lambda_{0,q}(1) \le \lambda_{0,q}(2) \le \cdots\}$ を$\square_{0,q}$ のスペクトル,

$\zeta_{0,q}(s) := \sum_{k \ge 1} \lambda_{0,q}(k)^{-s}$ を (M, g_M) のスペクトル ζ-関数とする。

この時、$\zeta_{0,q}(s)$ は全平面上有理型で、$s=0$ で正則である (Seeley)。

定義 2.1. 解析的トーションとは次式で定義される実数である：

$$\tau(X) := \prod_{q \ge 0} (\det \square_{0,q})^{(-1)^q q}, \quad \det \square_{0,q} := \exp\left(- \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \zeta_{0,q}(s) \right).$$

2.2 コホモロジーの行列式.

$\pi : X \to S$ を複素多様体間の固有平滑 Kähler 射とする。

定義 2.2. コホモロジーの行列式とは以下で定義される S 上の直線束である：

$$\lambda_X := \bigotimes_{q \ge 0} (\det R^q \pi_* \mathcal{O}_X)^{(-1)^q}.$$

λ_X には次の様にして Hermite 計量が入る。

$g_{X/S}$ を相対接束 $TX/S := \ker \pi_*$ 上の Kähler 計量、

$\mathcal{H}^{0,q}(X_t)$ をファイバー X_t 上の調和 $(0,q)$-形式の空間とする。

Hodge の定理より、λ_X のファイバーは調和形式の空間の行列式と見なせる：

$$\lambda_{X_t} = \bigotimes_{q \ge 0} (\det H^q(X_t, \mathcal{O}_{X_t}))^{(-1)^q} \cong \bigotimes_{q \ge 0} \left(\det \mathcal{H}^{0,q}(X_t)\right)^{(-1)^q} \tag{2.1}$$

これより調和形式の積分を通じて λ_X に Hermite 直線束の構造が入り、この計量を L^2-計量と呼び、$\|\cdot\|_{L^2}$ と書く。

<u>定義 2.3</u>. λ_X の $g_{X/S}$ に関する *Quillen* 計量とは以下で定義される *Hermite* 計量のことである： $\|\cdot\|^2_Q(t) := \tau(X_t)\cdot\|\cdot\|^2_{L^2}(t)$.

次の 2 定理は Quillen 計量に関して最も基本的である。

<u>定理 2.1</u> **([B-G-S]).** $c_1(\lambda_X, \|\cdot\|_Q)$ を $(\lambda_X, \|\cdot\|_Q)$ の *Chern* 形式とすれば、

$$c_1(\lambda_X, \|\cdot\|_Q) = \pi_*(Td(TX/S, g_{X/S}))^{(1,1)}.$$

<u>定理 2.2</u> **([B-G-S]).** $g_{X/S}$, $g'_{X/S}$ を *Kähler* 計量の族、$\|\cdot\|_Q$, $\|\cdot\|'_Q$ を $g_{X/S}$, $g'_{X/S}$ に関するλ_X の *Quillen* 計量とすれば、

$$\log\left(\frac{\|\cdot\|'_Q}{\|\cdot\|_Q}\right)^2 = \pi_*(\widetilde{Td}(TX/S; g_{X/S}, g'_{X/S}))^{(0,0)}.$$

但し、$\widetilde{Td}(TX/S; g_{X/S}, g'_{X/S})$ は *Bott-Chern* 類である。

Quillen 計量の境界挙動に関連して、次の問題は基本的である。

<u>問題 2.1</u>. $\pi : X \to S$ が特異ファイバーを持つ場合に、λ_X の曲率を計算せよ。

そこで最も一般的な退化の場合に問題 2.1 を考える。

<u>定義 2.4</u>. $\pi : X \to S$ を複素多様体間の射影的固有正則射、S を単位円盤とする。
(π, X, S) が孤立特異点の平滑化 $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 1) & \Sigma(\pi) := \{x \in X;\, d\pi(x) = 0\} \subset X_0, \\ 2) & \#\,\Sigma(\pi) < \infty. \end{cases}$
この時、特異ファイバー X_0 は超曲面孤立特異点のみを特異点として許容する。

g_X を X の Kähler 計量、$g_{X/S}$ を g_X から入る TX/S の Kähler 計量、$\|\cdot\|_Q$ を $g_{X/S}$ に関する λ_X の Quillen 計量とする。

<u>定理 2.3</u>**([Y1]).** $\|\cdot\|_Q$ は λ_X の特異 *Hermite* 計量で、曲率は次式で与えられる：

$$c_1(\lambda_X, \|\cdot\|_Q) = \pi_*(Td(TX/S, g_{X/S}))^{(1,1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)!}\mu(X_0)\delta_0.$$

($n = \dim X/S$, $\mu(X_0)$：特異ファイバーの全 *Milnor* 数、$\delta_0 := -\frac{i}{2\pi}\bar{\partial}\partial\log|t|^2$)
測度と見た時、右辺第 1 項が連続部分を第 2 項が特異部分に対応している。

2.3 超曲面孤立特異点の平滑化と解析的トーション.

定理 2.3 の応用として解析的トーションと周期の関係について述べる。

$\pi : X \to S$ を超曲面孤立特異点の平滑化、

g_X を X の Kähler 計量、$g_t := g_X|_{X_t}$ を X_t 上の誘導計量、

$\tau(X_t)$ を (X_t, g_t) の解析的トーション、

$H_n(X_t, \mathbb{Z})_{fr}$ を $H_n(X_t, \mathbb{Z})$ の自由部分、

$\Lambda = (\lambda_{ij})$ を $H_n(X_t, \mathbb{Z})_{fr}$ 上の固定された交差行列、

$\{\gamma_1(t), \cdots, \gamma_l(t)\}$ を $H_n(X_t, \mathbb{Z})_{fr}$ の許容基底$\left(\overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad (<\gamma_i(t), \gamma_j(t)>) = \Lambda\right)$、

$\{\omega_1, \cdots, \omega_m\}$ を $\pi_* \omega_{X/S}$ の $\mathcal{O}_S$-基底； $\quad \pi_* \omega_{X/S} = \mathcal{O}_S\, \omega_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_S\, \omega_m$、

$\Omega(t) := \left(\int_{\gamma_i(t)} \omega_j(t)\right)_{1 \le i \le l, 1 \le j \le m}$ を X_t の許容基底に関する周期行列とする。

この時、次の問題は自然であろう。

__問題 2.2__. $t \to 0$ の時の $\tau(X_t)$ の挙動を決定せよ。

__定理 2.4__([Y1]). g_X が *Hodge* 計量、即ち g_X の *Kähler* 類が整であると仮定する。

この時、次が成立する。

(1) $\tau(X_t)$ は $t \to 0$ の時、漸近展開を持つ：$\exists \{r_1, \cdots, r_N\} \in \mathbb{Q} \quad s.t. \quad t \to 0$ の時、

$$\tau(X_t) \sim \sum_r \sum_{i,j \ge 0} \sum_{k \ge -n \cdot h^{n,0}} a_{rijk} |t|^r t^i \bar{t}^j (\log|t|)^k \quad (t \to 0)$$

(2) $t \to 0$ の時、

$$\tau(X_t) \approx |t|^{\frac{2(-1)^n}{(n+2)!}\mu(X_0)} \det\left({}^t\Omega(t) \Lambda \bar{\Omega}(t)\right)^{(-1)^{n+1}}$$

(3) $Sing\, X_0$ が有理特異点ならば、$t \to 0$ の時、

$$\tau(X_t) \approx |t|^{\frac{2(-1)^n}{(n+2)!}\mu(X_0)}.$$

<u>注意</u>.

(1) $A(t) \approx B(t) \quad (t \to 0) \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \exists\, a \neq 0 \quad s.t. \quad \lim_{t\to 0} \frac{A(t)}{B(t)} = \exp(a)$、

(2) ${}^t\Omega(t)\Lambda\bar{\Omega}(t) = \left(\int_{X_t} \omega_i(t) \wedge \bar{\omega}_j(t)\right)$.

以上は解析的トーションと多様体の周期の関係についての定理であるが、より明解な漸近挙動についての予想を述べたい。

$(p, \mathcal{O}_{X,p})$ を $f(z) \in \mathbb{C}\{z_0, \cdots, z_n\}$ で定まる超曲面孤立特異点、

$b_f(s) = (s+1)\prod_i (s+\alpha_i), \quad \alpha_i \in \mathbb{Q}_+$ を $(p, \mathcal{O}_{X,p})$ の b-関数とする。

<u>定義 **2.5**</u>.

$$\nu(p) := \sum_{0<\alpha_i<1} \alpha_i, \quad \nu(X_0) := \sum_{p \in Sing\, X_0} \nu(p),$$

$$\delta_{n-1}(X_0) := \dim H^0_{(2)}(X_0, \Omega^{n-1}_{X_0}) - \dim H^0(X_t, \Omega^{n-1}_{X_t}) \quad (t \neq 0).$$

<u>予想 **2.1**</u>. $t \to 0$ の時、$\tau(X_t)$ の主要部は次式で与えられる：

$$\tau(X_t) \approx |t|^{2(-1)^n\left\{\frac{\mu(X_0)}{(n+2)!} - \nu(X_0)\right\}} \left(\log \frac{1}{|t|}\right)^{(-1)^n \delta_{n-1}(X_0)}.$$

<u>例 **2.1**</u>. $X_t = \{z_0^d + \cdots + z_n^d - t\, z_{n+1}^d = 0\} \subset \mathbb{P}^{n+1} \quad (t \to 0)$

<u>注意</u>. $Sing\, X_0$ が有理特異点 $\Longleftrightarrow \quad \forall i : \alpha_i > 1 \quad \Longrightarrow \quad \nu(X_0) = \delta_{n-1}(X_0) = 0.$

これより予想 *2.1* で $Sing\, X_0$ が有理特異点の場合が定理 *2.4 (3)* である。

3. Abel 多様体の判別式

第1節で楕円曲線について考えたことを Abel 多様体に対して考える。

$\mathfrak{S}_g := \{\tau \in M(g;\mathbb{C});\quad {}^t\tau = \tau,\quad Im\,\tau > 0\}$ を g 次 Siegel 上半空間、

$\Lambda = \{\Lambda_\tau := \mathbb{Z}\,e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\,e_g \oplus \mathbb{Z}\,\tau_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\,\tau_g\}_{\tau\in\mathfrak{S}_g}$ を $\mathbb{C}^g$ の格子族、

$A_\tau := \mathbb{C}^g/\Lambda_\tau$ （ $1_g = (e_1,\cdots,e_g)$ $\tau = (\tau_1,\cdots,\tau_g) \in \mathfrak{S}_g$）を Abel 多様体、

$p : \mathbb{A} := \mathbb{C}^g \times \mathfrak{S}_g/\Lambda \to \mathfrak{S}_g$ を $\mathfrak{S}_g$上の主偏曲 Abel 多様体の基本族（$p^{-1}(\tau) = A_\tau$）、

$T\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g = \ker p_* = \mathcal{O}_\mathbb{A}\frac{\partial}{\partial z_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_\mathbb{A}\frac{\partial}{\partial z_g}$ を $(p,\mathbb{A},\mathfrak{S}_g)$ の相対接束、

$g_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g} = \{g_\tau\}_{\tau\in\mathfrak{S}_g}$ を $T\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g$ の Kähler 計量（$g_\tau := {}^t dz(Im\,\tau)^{-1}d\bar{z}$）、

$\Gamma_g := Sp(2g;\mathbb{Z})$ を Siegel モジュラー群とする。

Γ_g は次のように $\mathbb{A}$ に作用する：$\forall\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g,\quad \forall(z,\tau) \in \mathbb{A},$

$$\gamma\cdot(z,\tau) = ({}^t(C\tau+D)^{-1}z, (A\tau+B)(C\tau+D)^{-1}),\quad \gamma^* g_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g} = g_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g}. \tag{3.1}$$

定理 1.1 の素朴な類似として次の問題は自然である。

<u>問題 3.1</u>. *Abel* 多様体の解析的トーションは何か？

<u>定理</u>**(Ray-Singer).** $\tau(A_\tau) \equiv 1\quad (g > 1).$

即ち、$\tau(A_\tau)$ は何ら保型形式を生み出さない。この理由を考えるために $(p,\mathbb{A},\mathfrak{S}_g)$ のコホモロジーの行列式を見てみる。定義より、$\lambda_\mathbb{A} = \bigotimes_{q\geq 0}(\det R^q p_*\mathcal{O}_\mathbb{A})^{(-1)^q}$ が $(p,\mathbb{A},\mathfrak{S}_g)$ のコホモロジーの行列式である。Γ_g の $\mathbb{A}$ への作用はファイバーをファイバーに移すので、Γ_g は q 次順像 $R^q p_*\mathcal{O}_\mathbb{A}$ に作用する。従って $\lambda_\mathbb{A}$ にも作用する。又、ファイバーが Abel 多様体なので次が従う：

$$\bigwedge^q R^1 p_*\mathcal{O}_\mathbb{A} \cong_{\Gamma_g} R^q p_*\mathcal{O}_\mathbb{A}. \tag{3.2}$$

一方、勝手なベクトル束 F に対して、

$$\bigotimes_{q\geq 0}(\wedge^q F)^{(-1)^q} \cong \begin{cases} F^\vee & (rank\,F = 1) \\ 1 & (rank\,F > 1) \end{cases} \tag{3.3}$$

が成立するので、次が従う：

$$\lambda_{\mathbb{A}} \cong_{\Gamma_g} \begin{cases} p_* \omega_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g} & (g=1) \\ \mathcal{O}_{\mathbb{A}} \cdot 1_{\mathbb{A}} & (g>1). \end{cases} \tag{3.4}$$

ここで $\omega_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g}$ は $(p, \mathbb{A}, \mathfrak{S}_g)$ の相対標準束である。

<u>命題 **3.1**</u>. $g > 1$ ならば $\lambda_{\mathbb{A}}$ の Γ_g-不変な断面 $1_{\mathbb{A}} \in H^0(\mathfrak{S}_g, \lambda(\mathcal{O}_{\mathbb{A}}))_{\Gamma_g}$ が存在して、$\|1_{\mathbb{A}}\|_Q(\tau) \equiv 1$ が成立する。

この様に、$g=1$ と $g>1$ ではコホモロジーの行列式の構造が全く異なる。従って、次の問題が生ずる。

<u>問題 **3.2**</u>. コホモロジーの行列式が楕円曲線の基本族の一般化となる族は何か？

4. テータ因子の判別式

この節では問題 3.2 に解答を与える。テータ関数を次式で定義する：

$$\theta(z, \tau) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp \pi i \left({}^t m\, \tau\, m + 2\, {}^t m\, z \right). \tag{4.1}$$

$\Theta_\tau := \{z \in A_\tau;\ \theta(z, \tau) = 0\}$ を A_τ のテータ因子、

$p : \Theta \to \mathfrak{S}_g$ をテータ因子の基本族（$p^{-1}(\tau) = \Theta_\tau$）、

$\Gamma_g(1,2) := \{\gamma \in \Gamma_g; \gamma \cdot \Theta = \Theta\} \subset \Gamma_g$ を Γ_g の指数有限な部分群、

$N_g := \{\tau \in \mathfrak{S}_g;\ Sing\, \Theta_\tau \neq \emptyset\}$ を Andreotti-Mayer 軌跡とする。

<u>命題 **4.1**</u>. N_g は Γ_g-不変な $\mathfrak{S}_g$ 上の因子である。

$\mathbb{A}$ 上の $\Gamma_g(1,2)$-層の完全列：

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}}(-\Theta) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Theta} \longrightarrow 0 \tag{4.2}$$

に小平消滅定理を組み合わせることにより、次の同型が得られる：

$$\lambda_{\Theta} \cong_{\Gamma_g(1,2)} \lambda_{\mathbb{A}} \otimes (p_* \omega_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g})^{(-1)^g}. \tag{4.3}$$

従って、λ_Θ は次の楕円曲線の場合に類似した標準的断面を持つ：

$$\sigma_\Theta(\tau) := 1_{\mathbb{A}}(\tau) \otimes (dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_g)_\tau^{(-1)^g}. \tag{4.4}$$

<u>命題 4.2</u>. テータ因子の基本族 $(p, \Theta, \mathfrak{S}_g)$ のコホモロジーの行列式は楕円曲線の基本族のコホモロジーの行列式の自然な一般化である。

そこで次の問題を考えるのは自然であろう。

<u>問題 4.1</u>. テータ因子の解析的トーションは何か？

5. Andreotti-Mayer 形式

5.1 <u>Andreotti-Mayer 形式</u>.

<u>定義</u>：$f(\tau) \in \mathcal{O}(\mathfrak{S}_g)$ が $\Gamma'(\subset \Gamma_g)$ に関する重さ kの指標 χ 付き保型形式

$$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma', \quad f(\gamma \cdot \tau) = \det(C\tau + D)^k \cdot \chi(\gamma) \cdot f(\tau).$$

$\Gamma' = \Gamma_g$, $\chi = 1$ の時、$f(\tau)$ は重さ k の Siegel 保型形式と呼ばれる。

$g_{\Theta_\tau} := g_\tau|_{\Theta_\tau}$ を Θ_τ の Kähler 計量 （$g_\tau = {}^t dz (Im\tau)^{-1} d\bar{z}$）、

$\tau(\Theta_\tau)$ を $(\Theta_\tau, g_{\Theta_\tau})$ の解析的トーションとする。

<u>定理 5.1([Y1])</u>. N_g を零因子に持つ重さ $\frac{(g+3)\cdot g!}{2}$ の *Siegel* 保型形式 $\Delta_g(\tau)$ が存在して、次が成立する（テータ因子に対する *Kronecker* 極限公式）：

$$\tau(\Theta_\tau) = \left\{ (\det\, Im\,\tau)^{\frac{g+3}{2(g+1)}} \cdot |\Delta_g(\tau)|^{\frac{2}{(g+1)!}} \right\}^{(-1)^{g+1}}.$$

$\Delta_g(\tau)$ についてもう少し詳しいことがわかる。

$\forall \quad a, b \in \mathbb{F}_2^g$ （$F_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）、テータ定数を次式で定める：

$$\theta_{a,b}(\tau) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp \pi i \left({}^t(m + \frac{1}{2}a)\,\tau\,(m + \frac{1}{2}a) + {}^t(m + \frac{1}{2}a)\,b \right). \tag{5.1}$$

$((a, b) = {}^t a \cdot b \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \theta_{a,b}(\tau) = 0, \qquad (a, b) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \theta_{a,b}(\tau) \neq 0.)$

$\chi_g(\tau) := \prod_{(a,b)=0} \theta_{a,b}(\tau)$ を偶テータ定数全部の積とする。

命題 5.1. *Siegel*保型形式 $J_g(\tau)$ が存在して、

$$\Delta_g(\tau) = \chi_g(\tau) \cdot J_g(\tau)^2.$$

これより $g < 5$ の時、$\Delta_g(\tau)$ を定数倍を除いて決定できる。

(5.2) $$\Delta_g(\tau) = \chi_g(\tau) \quad (g = 2, 3), \quad \Delta_4(\tau) = \chi_4(\tau) \cdot J_4(\tau)^2.$$

ここで、$J_4(\tau) \in \mathbb{Z}[\theta_{a,b}(\tau)]_{a,b\in\mathbf{F}_2^g}$ は Schottky により発見された保型形式である。(テータ定数による J_4 の表示は一意的ではない。)

命題 5.2 (**Schottky**、**Beauville**、**井草**). $J_4(\tau)$ は $\mathfrak{S}_4$ の中で種数 4 の曲線の *Jacobian* を特徴付ける。

5.2 Andreotti-Mayer 形式の積分公式.

Bismut-Lebeaut の定理([B-L])を用いることにより $\Delta_g(\tau)$ の積分表示を得る。

定理 5.2([Y3]). $\Omega_\tau := \frac{i}{2\pi}{}^t dz (Im\,\tau)^{-1} d\bar{z}$ を A_τのケーラー形式とすれば、

$$\log|\Delta_g(\tau)|^2 = \int_{A_\tau} \sum_{i+j=g-1} \Omega_\tau^{i+1} \wedge \left(\Omega_\tau - \frac{i}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log\|D\theta\|^2\right)^j \log\|D\theta\|^2$$
$$+ \int_{A_\tau} \left(\Omega_\tau - \frac{i}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log\|D\theta\|^2\right)^g \log\|\theta\|^2 - g!\log\det Im\tau.$$

ここで、$D\theta$ は $\theta \in H^0(A, L)$ ($L = \mathcal{O}_{\mathbb{A}}([\Theta])$) の *Cartan* 接続による共変微分である。

$g = 1$ の時は、$\Delta_1(\tau) = \Delta(\tau)^{\frac{1}{8}}$ として次の Faltings の公式([F])が得られる:

(5.3) $$\log|\Delta(\tau)|^{\frac{1}{12}} = \int_{E_\tau} \log\|\theta\|^2\,\Omega_\tau.$$

応用. 定理 5.2 の応用として Schottky 形式 J_4 と種数 3 曲線の定義方程式に関係がつく。

$J_4(\tau)$ を Schottky 形式、

$\tau(t) = \begin{pmatrix} \tau_1 & t\,z \\ t\,{}^t z & \tau_2 \end{pmatrix}$ ($\tau_1 \in \mathfrak{S}_3$、$\tau_2 \in \mathbb{H}$、$z \in \mathbb{C}^3$) とおく。

この時、$\{A_{\tau(t)}\}$ は 4 次元 Abel 多様体の族で $A_{\tau(0)} = A_{\tau_1} \times E_{\tau_2}$ である。

<u>定理 5.3</u>(**[Y4]**). $\tau_1 \notin N_3$ ならば $\mathcal{O}(\mathfrak{S}_3)$-係数の同次4次多項式 $F(z,\tau_1) \in \mathcal{O}(\mathfrak{S}_3)[z_1, z_2, z_3]$ が存在して、次が成立する。

(1)

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^4\Bigg|_{t=0} J_4(\tau(t)) = \Delta(\tau_2)\cdot F(z,\tau_1),$$

(2) $C_{\tau_1} := \{z \in \mathbb{P}^2;\ F(z,\tau_1) = 0\}$ は種数3の曲線で $Jac(C_{\tau_1}) = A_{\tau_1}$。

<u>注意</u>. $\chi_4(\tau)$ に対して同様の事を考えると次のようになる：

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{28}\Bigg|_{t=0} \chi_4(\tau(t)) = \Delta(\tau_2)^8\cdot\Delta_3(\tau_1)^3\cdot G(z,\tau_1). \tag{5.4}$$

ここで、$L_{\tau_1} = \{z \in \mathbb{P}^2;\ G(z,\tau_1) = 0\}$ は C_{τ_1} の２８本の複接線である。

5.3 <u>定理 5.1 の証明の方針</u>.

(1) $g_E := {}^t dz \cdot d\bar{z}$ を $T\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g$ の Euclid 計量、

$g_{E,\Theta/\mathfrak{S}_g}$ を g_E から定まる相対接束 $T\Theta/\mathfrak{S}_g$ の Kähler 計量、

$\|\cdot\|'_Q$ を $g_{E,\Theta/\mathfrak{S}_g}$ に関する λ_Θ の Quillen 計量とする。

Debbare の定理（[D]）と定理 2.1、2.3 より次が従う：

$$c_1(\lambda_\Theta, \|\cdot\|'_Q) = \frac{(-1)^{g+1}}{(g+1)!}\delta_{N_g}. \tag{5.5}$$

これより、$\Delta_g(\tau) \in \mathcal{O}(\mathfrak{S}_g)$ が存在して次が成立する：

$$(\Delta_g)_0 = N_g, \quad \|\sigma_\Theta\|'^2_Q(\tau) = |\Delta_g(\tau)|^{\frac{2(-1)^{g+1}}{(g+1)!}}. \tag{5.6}$$

(2) 定理 2.2 より次がわかる：$\forall\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g(1,2)$、

$$\log\left(\frac{\gamma^*\|\cdot\|'_Q}{\|\cdot\|'_Q}(\tau)\right)^2 = \frac{(-1)^g(g-1)}{g+1}\log|\det(C\tau + D)| \tag{5.7}$$

即ち、$\Delta_g(\tau)$ は $U(1)$-指標付きの $\Gamma_g(1,2)$ に関する保型形式である。Γ_g と N_g の性質から $\Delta_g(\tau)$ はΓ_g に関する保型形式で指標は自明ある。

(3) 再び定理 2.2 より次がわかる：

$$\log\left(\frac{\|\cdot\|'_Q}{\|\cdot\|_Q}\right)^2 = \frac{(-1)^g(g+1)}{2(g+1)}\log\det Im\tau. \tag{5.8}$$

(5.6) と (5.8) より

$$\|\sigma_\Theta\|^2_Q(\tau) = (\det Im\tau)^{\frac{(-1)^g(g-1)}{2(g+1)}}|\Delta_g(\tau)|^{\frac{2(-1)^{g+1}}{(g+1)!}} \tag{5.9}$$

となるので、

$$\log\|\sigma_\Theta\|^2_{L^2}(\tau) = (-1)^g\log(2\pi)^g\det Im\tau \tag{5.10}$$

と組み合わせて定理を得る。 □

References

[B-G-S]. Bismut, J.-M., Gillet, H., Soulé, C., *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles I, II, III*, Commun. Math. Phys. **115** (1988), 49-78, 79-126, 301-351.

[B-L]. Bismut, J.-M., Lebeau, G., *Complex immersions and Quillen metrics*, Publ. Math. IHES **74** (1991), 1-297.

[D]. Debarre, O., *Le lieu des variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier a deux composantes*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **25** (1992), 687-708.

[F]. Faltings, G., *Calculus on arithmetic surfaces*, Ann. of Math. **119** (1984), 612-649.

[J-K]. Jorgenson, J. and Kramer, J., *Towards the arithmetic degree of line bundles on abelian varieties*, preprint (1997).

[J-T1]. Jorgenson, J., Todorov, A., *A conjectured analogue of Dedekind's eta function for K3 surfaces*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 359-376.

[J-T2]. ———, *Analytic discriminants for manifolds with canonical class zero*, Symposia Math. **36** (1996), 223-260.

[Y1]. Yoshikawa, K.-I., *Smoothing of isolated hypersurface singularities and Quillen metrics*, preprint (1997).

[Y2]. ———, *Discriminant of theta divisors and Quillen metrics*, preprint (1997).

[Y3]. ———, *An integral representation formula for Andreotti-Mayer forms*, preprint (1997).

[Y4]. ———, *Schottky's modular form and defining equation of curves of genus 3*, preprint (1997).